

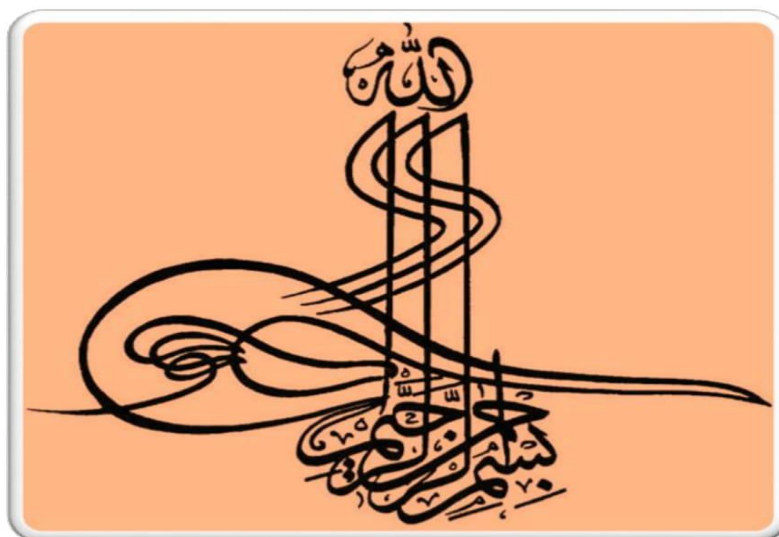
استاد : حبیب هاشمی

مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

فصل اول هندسه ۲

پایه یازدهم

رشته ریاضی و فیزیک

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی



پاسخ کاملا تشریحی



حل تمامی تمرینات □ فعالیت ها و کاردر کلاس ها



مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل اول کتاب درسی هندسه ۲ پایه یازدهم رشته ریاضی و فیزیک نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

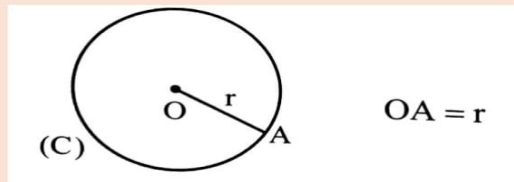
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

تعریف دایره: فرض کنیم O نقطه ثابت و r عدد حقیقی مثبت باشد. دایره به مرکز O و شعاع r مجموعه نقطه هایی از صفحه است که فاصله ی آن ها از نقطه O برابر r باشد.

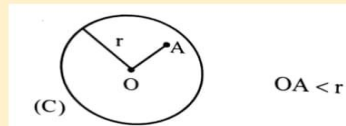


توجه : دایره C به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می دهیم.

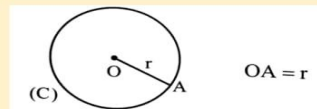
نکته : دو دایره با شعاع های مساوی با هم برابرند.

اوضاع نسبی نقطه و دایره

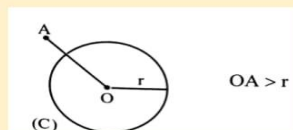
(آ) اگر نقطه A درون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره، کم تر از شعاع دایره است.



(ب) اگر نقطه A روی دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است



(پ) اگر نقطه A بیرون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره بیش تر از شعاع دایره است



۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

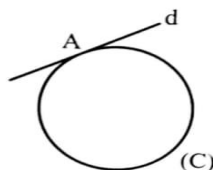
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

خط مماس بر دایره و خط متقاطع با دایره

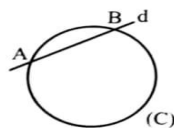
خط مماس بر دایره: اگر خط و دایره فقط در یک نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

در شکل مقابل خط d در نقطه A بر دایره (C) مماس است.



خط متقاطع با دایره: اگر خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط و دایره متقاطع اند.

در شکل مقابل، خط d دایره (C) را در دو نقطه A و B قطع کرده است. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.



۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

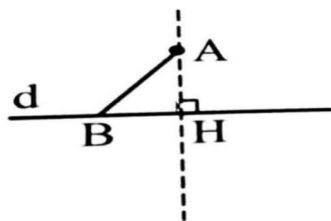
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

فاصله یک نقطه از یک خط

اگر از یک نقطه خارج یک خط، عمودی بر آن رسم کنیم، فاصله آن نقطه تا پای عمود، کوتاه ترین فاصله بین نقطه A و نقاط خط می باشد.

در شکل مقابل، AH کوتاه ترین فاصله نقطه A تا نقاط خط d است ($AB > AH$) و به آن فاصله نقطه A تا خط d گفته می شود. اگر A روی خط d باشد، فاصله A تا خط d صفر است.

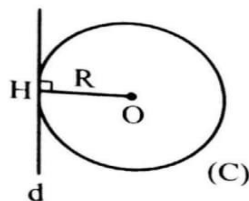


اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

یک خط و یک دایره در صفحه دارای سه وضعیت زیر هستند:

الف) خط بر دایره مماس است، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد

$OH = R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) مماس است.



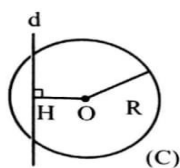
ب) خط با دایره متقاطع است. اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط کم تر از شعاع دایره باشد.

$OH < R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) متقاطع اند.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

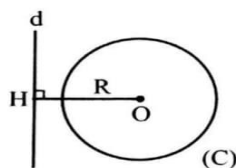
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



پ) خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند. اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط، بزرگتر از شعاع دایره باشد.

$OH > R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) نقطه اشتراکی ندارند.



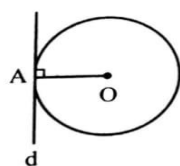
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

خاصیت مهم خط مماس

خاصیت ۱- اگر A نقطه ای روی دایره باشد شعاع OA و خط مماس بر دایره در نقطه A بر هم عمودند



$$(d \perp OA)$$

اثبات: فرض کنیم خط d در نقطه A بر دایره $C(O,R)$ مماس باشد. از نقطه O عمود OH را بر خط d رسم می کنیم.

الف) اگر $OH > R$ باشد، خط d و دایره (C) متقاطع نیستند که با فرض مماس بودن خط d و دایره (C) تناقض دارد.

ب) اگر $OH < R$ باشد، خط d و دایره (C) در دو نقطه متقاطع می شوند که با فرض مماس بودن آن ها تناقض دارد.

پ) اگر $OH = R$ باشد در این صورت H روی دایره (C) قرار دارد و چون H روی خط d نیز هست پس به جهت مماس بودن خط و دایره نتیجه می شود: H همان A است. بنابراین OA بر خط d عمود است.

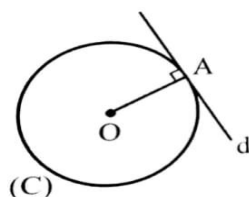
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

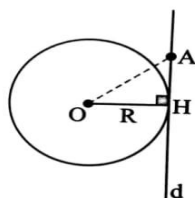
حبیب هاشمی

چگونگی رسم خط مماس بر دایره در نقطه ی A بر دایره (به کمک خاصیت ۱)

مرکز دایره را به نقطه A وصل می کنیم . سپس در نقطه A خط d را عمود بر OA رسم می کنیم
خط d در نقطه A بر دایره (C) مماس است.



خاصیت ۲: اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره بر آن شعاع عمود باشد، آن گاه این خط بر دایره مماس است.



راه حل: در شکل روبه رو خط d در نقطه ی H بر شعاع OH عمود است باید ثابت کنیم خط d بر دایره مماس است.
برای این کار کافی است ثابت کنیم خط d و دایره ی (O,R) فقط در نقطه ی H مشترک اند.
فرض کنید نقطه ی a نقطه ای غیر از H و روی خط d باشد. چون مثلث OAH قائم الزاویه است و OA وتر آن است.
پس $OH < OA$ یعنی $R < O$. بنابراین A خارج دایره است. در نتیجه خط d و دایره فقط در یک نقطه ی H مشترک هستند و این نتیجه می دهد که خط d بر دایره مماس است.

نتیجه خاصیت ۱ و ۲: در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

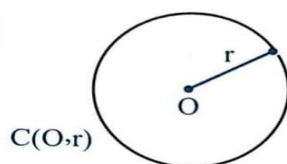
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

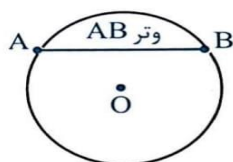
حبیب هاشمی

تعاریف و مفاهیم اولیه

الف) شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره است.



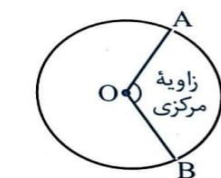
ب) وتر دایره: پاره خطی که دو نقطه متمایز از دایره را به هم وصل می کند. به عبارت دیگر پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.



پ) قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می گذارد.



ت) زاویه مرکزی: زاویه ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.



۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

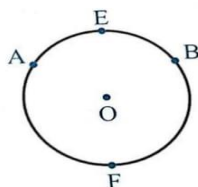
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

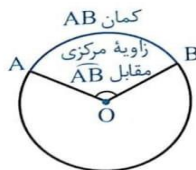
ث) **زاویه محاطی**: زاویه ای است که راس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند.



ج) **کمان**: دو نقطه A و B واقع بر یک دایره دو کمان AB را روی آن دایره مشخص می کند. در این حالت برای مشخص کردن هر یک از آنها از نقطه ای اختیاری واقع بر هر یک از دو کمان استفاده می شود. مانند کمان های AEB و AFB در شکل مقابل. معمولاً منظور از AB کمان کوچکتر است.



چ) **اندازه کمان**: هر یک از زاویه های مرکزی یک کمان از دایره جدا می شود به آن کمان، کمان نظیر آن زاویه مرکزی گفته می شود. اندازه کمان نظیر هر زاویه مرکزی، همان اندازه زاویه مقابل به آن کمان تعریف می شود که واحد آن درجه است.

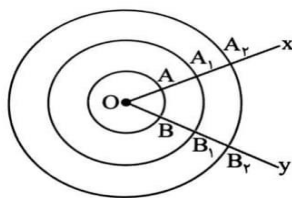


۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

تذکر: دقت کنید که نباید اندازه ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. برای درک این مطلب به شکل رو به رو نگاه کنید.



در این شکل سه دایره ی هم مرکز رسم کرده ایم. با توجه به مطلب بالا، اندازه ی کمان ها AB ،

A_1B_1 و A_2B_2 برابرند. یعنی

$$\widehat{xOy} = AB = A_1B_1 = A_2B_2$$

اما طول این کمان ها با هم برابر نیستند.

طول کمان $A_2B_2 < A_1B_1 < AB$ طول کمان

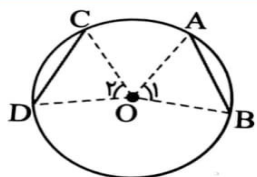
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

خواص وترهای مساوی در دایره

۱) در یک دایره (با دو دایره به شعاع های مساوی) دو وتر برابرند اگر و تنها اگر کمان های نظیر آن ها برابر باشند.



$$AB = CD \Leftrightarrow \hat{A}OB = \hat{C}OD$$

راه حل اثبات دو بخش دارد.

بخش اول فرض می کنیم $AB=CD$ و ثابت می کنیم $\hat{A}OB = \hat{C}OD$ (شکل را ببینید) از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می کنیم.

دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی سه ضلع هم نهشت اند:

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } \hat{A}OB = \hat{C}OD \text{ در نتیجه } AB = CD$$

بخش دوم فرض می کنیم $\hat{A}OB = \hat{C}OD$ و ثابت می کنیم $AB = CD$

چون دو کمان AB و CD با هم برابرند، پس زاویه های مرکزی رو به رو با آن ها با هم برابرند، یعنی $\hat{A}OB = \hat{C}OD$

اکنون دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین آن ها با هم هم نهشت اند:

$$\begin{cases} \hat{A}OB = \hat{C}OD \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{cases}$$

$$\text{و در نتیجه } AB = CD$$

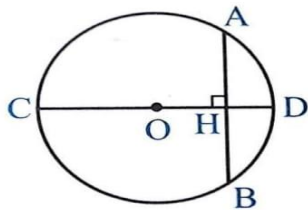
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

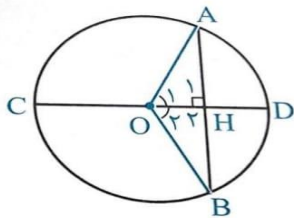
چگونه نصف شدن وتر به وسیله قطر دایره

۱- در هر دایره قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.



$$AB \text{ وتر } CD \text{ قطر عمود بر وتر } \Rightarrow AH = BH, \begin{cases} AD = BD \\ AC = BC \end{cases}$$

فرض : $CD \perp AB$ حکم : $AD = BD$ ، $AH = BH$



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \angle A = \angle B = 90^\circ \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}$$

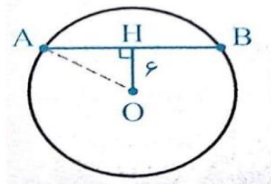
$$\left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{O}_A = \hat{O}_B \end{array} \right. \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} AD = BD$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال: دایره $C(O, 10)$ داده شده است اگر فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۶ باشد طول وتر AB را بدست آورید.

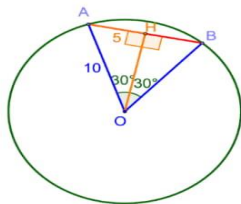


پاسخ: در مثلث AHB از رابطه فیثاغورس استفاده می کنیم.

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = 64 \Rightarrow AH = 8$$

$$AB = 2AH = 16$$

مسئله: در دایره $C(O, R)$ و $AB = 60$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید. (تمرین ۷ ص ۱۷)



می دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است چون ۳ زاویه ۶۰ درجه دارد. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز

باید نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم ، قطر عمود بر وتر و وتر را نصف می

کند بنابراین $AH = 5$ پس در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \rightarrow 10^2 = OH^2 + 5^2 \rightarrow OH^2 = 75 \rightarrow OH =$$

$$\sqrt{75} \Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

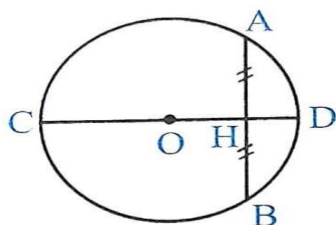
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

(۲) در هر دایره اگر قطری از آن یک وتر را نصف کند. آن گاه بر آن وتر عمود است و کمان های نظیر وتر را نصف می کند.

فرض: $AH=BH$

حکم: $AB \perp CD$, $AD = BD$



فرض: $AH=BH$ حکم: $AB \perp CD$ و $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ $H_1 = H_2 = 90^\circ$ $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ $\widehat{AD} = \widehat{BD}$

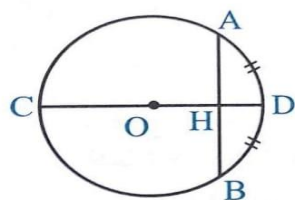
جزئی نظیر $\triangle OAH \cong \triangle OBH$ \rightarrow ض ض ض

$OA = OB = R$
 $AH = BH$
 $OH = OH$

(۳) در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد بر آن وتر عمود است و آن را نصف می کند.

$AD = BD$ یا $AC = BC \Rightarrow CD \perp AB$, $AH = BH$

فرض: $AD = BD$ حکم: $CD \perp AB$ و $AH = BH$



مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

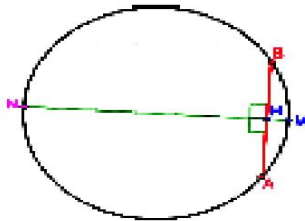
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ AD = BD \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_A = \hat{O}_B \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}$$

$$\begin{cases} \hat{H}_A = \hat{H}_B = 90^\circ \\ AH = BH \end{cases}$$

نتیجه: عمود منصف وتر دایره از مرکز دایره می گذرد.

مثال: اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می توانیم قطر عمود بر وتر AB را

رسم کنیم؟



اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم و از سمت

H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه N قطع کند با MN قطر عمود بر این وتر است.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

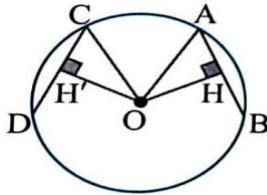
حبیب هاشمی

فاصله ی دو وتر مساوی از مرکز دایره:

در یک دایره (یا دو دایره با شعاع های مساوی) دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آن ها برابر باشد.

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

راه حل: فرض می کنیم $AB = CD$ می خواهیم ثابت کنیم $OH = OH'$ و بر عکس (شکل را ببینید)



از نقطه ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم می کنیم. در دو مثلث قائم الزاویه ی OAH و OCH' بنابر قضیه ی فیثاغورس.

$$OA^2 = OH^2 + AH^2, \quad OC^2 = OH'^2 + CH'^2$$

یعنی

$$AH = \frac{AB}{2} \Rightarrow R^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}, \quad CH' = \frac{CD}{2}, \quad R^2 = OH'^2 + \frac{CD^2}{4}$$

چون $AB = CD$ پس

$$OH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = R^2 - \frac{CD^2}{4} = OH'^2$$

در نتیجه

$$OH = OH'$$

با عمل بازگشتی می توان عکس این مطلب را ثابت کرد.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

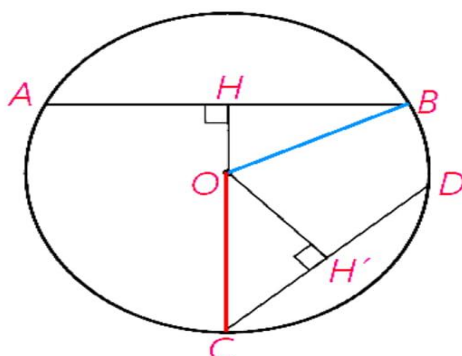
حبیب هاشمی

خواص وترهای نامساوی در دایره:

در یک دایره اگر دو وتر نامساوی باشند آن گاه وتری که بزرگ تر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بالعکس.

به عبارت دیگر در دایره $C(O,R) - AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ و OH' فاصله O از

دو وتر AB و CD هستند (تمرین ۸ صفحه ۱۸)



حل) از O به B و C وصل می کنیم

می دانیم اگر از مرکز دایره عمودی بر وتر رسم کنیم آن وتر را نصف می کند.

فرض : $AB > CD$ حکم : $OH < OH'$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$OB = OC = R, BH = \frac{AB}{2}, CH' = \frac{CD}{2} \quad (۱)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \xrightarrow{\times(-۱)} OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{\frac{OH^2 >}{OH'^2 >}} OH < OH'$$

فرض : $OH < OH'$ حکم : $AB > CD$

$$OB = OC = R, BH = \frac{AB}{2}, CH' = \frac{CD}{2}$$

$$\triangle OBH \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow OH'^2 < R^2 - CH'^2$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2$$

$$\Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \xrightarrow{\times(-۱)} BH^2 > CH'^2 \xrightarrow{\frac{BH^2 >}{CH'^2 >}} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

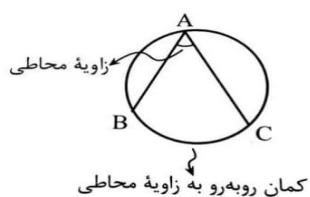
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

زاویه محاطی و اندازه آن

زاویه محاطی: زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

شکل زیر زاویه محاطی BAC را نشان می دهد..

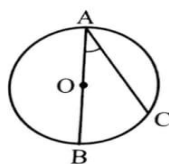


اندازه زاویه محاطی :

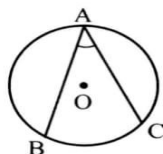
اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان روبه‌رو آن است یعنی در هر سه حالت زیر داریم:

$$\hat{A} = \frac{BC}{2}$$

حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی وتری از دایره باشد



حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز قرار باشند.

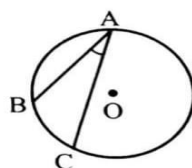


۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

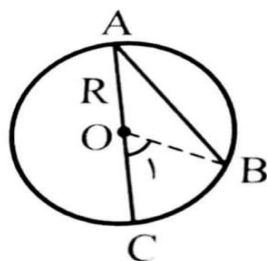
حبیب هاشمی

حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز باشند.



اثبات: این قضیه را در سه حالت اثبات می کنیم:

حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد.



از O به B وصل می کنیم تا مثلث متساوی الساقین OAB ($OB = OA$) ایجاد شود. یعنی زاویه محاور

ساق با هم برابرند $\hat{A} = \hat{B}$ بنابراین:

از طرفی \hat{O} زاویه مرکزی است، و هر زاویه مرکزی با کمان مقابلش برابر است یعنی

$$\hat{O} = BC \quad (۲)$$

$$\hat{A} = \frac{BC}{۲}$$

طبق (۱) و (۲) داریم

یادآوری: هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است.

مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

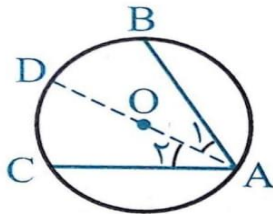
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد.

ابتدا مطابق شکل قطری از دایره را که از رأس A می گذرد، با توجه به حالت اول داریم:

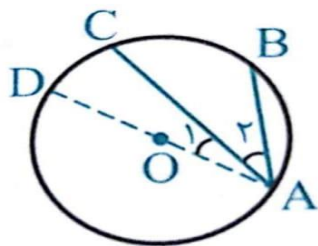


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \frac{BD}{2} \\ \widehat{A}_2 = \frac{DC}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{BD}{2} + \frac{DC}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{BC}{2}$$

$$\widehat{A} = \frac{BC}{2}$$

حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع شده باشند.

قطر AD را رسم می کنیم طبق حالت اول داریم:



مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

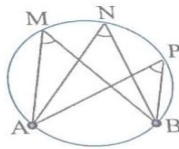
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \frac{BD}{2} \\ \widehat{A}_1 = \frac{DC}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل طرفین}} \widehat{A} + \widehat{A}_1 = \frac{BD}{2} + \frac{DC}{2} \Rightarrow \widehat{A}_r = \frac{BC}{2}$$

$$\widehat{A}_r = \frac{BC}{2}$$

نتیجه:

(۱) در هر دایره اندازه‌ی زاویه‌های محاطی روبه روی یک کمان، با هم برابرند.

در شکل رو به رو اندازه‌ی زاویه‌های M ، N و P با هم برابر است. چون همگی مقابل به یک کمان هستند.



$$M = \widehat{N} = \widehat{P} = \frac{1}{2} AB$$

(۲) زاویه‌ی محاطی رو به رو به قطر دایره 90° است. چون قطر دایره، دایره را به دو کمان 90° درجه تقسیم می‌کند.

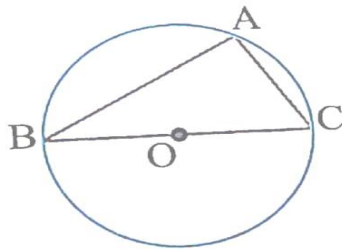
به عبارت دیگر در شکل رو به رو اگر BC قطر دایره باشد، آن گاه

$$\widehat{BAC} = \frac{BC}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

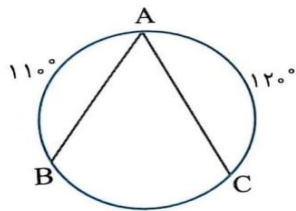
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



مثال: در دایره ی شکل مقابل، اندازه ی زاویه A را به دست آورید.



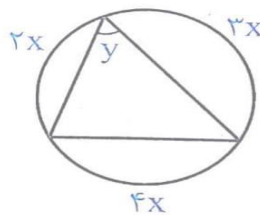
راه حل: دایره در حالت کلی کمان با اندازه ی 360° درجه است. از این مطلب استفاده کرده و اندازه ی کمان BC را به دست آوریم.

$$AB + AC + BC = 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + 120^\circ + BC = 360^\circ \Rightarrow BC = 130^\circ$$

از طرفی می دانیم اندازه ی یک زاویه ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{A} = \frac{BC}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

در شکل مقابل X و Y را محاسبه کنید.



مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$2x + 3x + 4x = 360^\circ \Rightarrow 9x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ, y = \frac{4x}{2} = 2x = 80^\circ$$

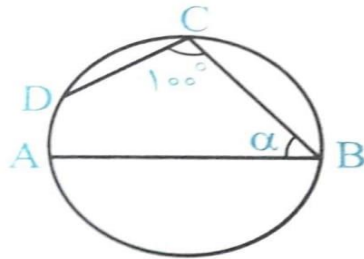
تست: در دایره مقابل AB قطر و CD = BC است. مقدار α چند درجه است؟

۵۵ (۴)

۶۰ (۳)

۶۵ (۲)

۵۰ (۱)



پاسخ:

$$\widehat{BCD} = \frac{BAD}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{AD + 180^\circ}{2} \Rightarrow AD = 200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$$

$$AD + CD + BC = 180^\circ \xrightarrow{CD=BC} 20^\circ + 2CD = 180^\circ \Rightarrow CD = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\alpha = \frac{ADC}{2} = \frac{AD + CD}{2} = \frac{20^\circ + 80^\circ}{2} = 50^\circ \Rightarrow \text{گزینه (۱) درست است}$$

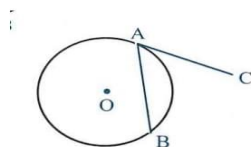
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

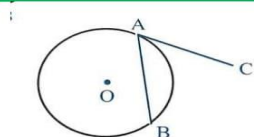
زاویه ظلّی و اندازه آن

زاویه ظلّی: زاویه ای است که راس آن روی دایره می باشد یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است.

مانند BAC در شکل مقابل:

قضیه: اندازه هر زاویه ظلّی، برابر نصف کمان رو به روی آن است. یعنی در شکل مقابل:

$$C\hat{A}B = \frac{AB}{2}$$



اثبات روش اول:
 $\triangle C A B$ زاویه ظلّی است: فرض

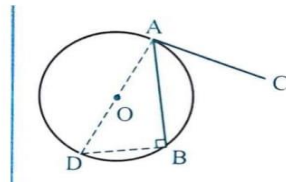
$$C\hat{A}B = \frac{AB}{2} \text{ حکم}$$

قطر AD را رسم می کنیم.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



سپس از D به B وصل می کنیم. B زاویه محاطی مقابل به قطر است. در نتیجه $\hat{B} = \frac{AD}{2} = 90^\circ$

بنابر این:

$$\hat{A}DB + \hat{D}AB = 90^\circ \quad (1)$$

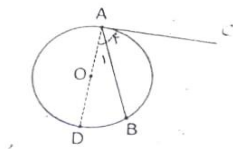
$$\hat{D}AB + \hat{B}AC = 90^\circ \quad (2)$$

چون خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره (OA) عمود است: پس از (1) و (2) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}AC = \hat{A}DB \\ \hat{A}DB = \frac{AB}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}AC = \frac{AB}{2}$$

اثبات به روش دوم

حالت اول) اگر زاویه ظلی حاده باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم:



شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

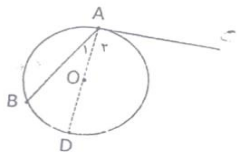
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\left. \begin{aligned} D\hat{A}C = 90^\circ \Rightarrow D\hat{A}C &= \frac{1}{2} ABD \\ A_1 &= \frac{1}{2} BD \end{aligned} \right\} \Rightarrow D\hat{A}C - A_1 = \frac{1}{2} (AD - BD) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} AB$$

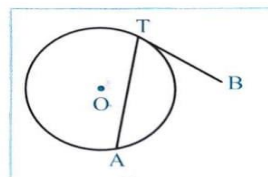
حالت دوم) اگر زاویه ظلی منفرجه باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم:



$$\left. \begin{aligned} D\hat{A}C = 90^\circ \Rightarrow D\hat{A}C &= \frac{1}{2} AD \\ \hat{A}_1 &= \frac{1}{2} BD \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{D\hat{A}C + \hat{A}_1}_A = \frac{1}{2} \underbrace{(AD + BD)}_{ADB} \Rightarrow A = \frac{1}{2} ADB$$

مثال: اگر اندازه زاویه ظلی ATB برابر $(2\alpha - 6)^\circ$ و اندازه کمان AT برابر $(3\alpha + 32)^\circ$ باشد،

مقدار α و اندازه زاویه ATB را به دست آورید.



$$ATB = \frac{AT}{2}$$

پاسخ: چون اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان

مقابل است ، داریم:

$$2\alpha - 6 = \frac{3\alpha + 32}{2} \Rightarrow 4\alpha - 12 = 3\alpha + 32 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

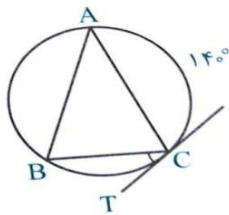
$$\text{طبق فرض } \widehat{ATB} = (2\alpha - 6)^\circ, \quad AT = (2\alpha + 22)^\circ$$

$$\text{بنابراین } 2\alpha - 6 = \frac{3\alpha + 33}{2} \Rightarrow 4\alpha - 12 = 3\alpha + 33 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ATB} = (2 \times 45 - 6) = 84^\circ$$

مثال: در شکل رو به رو $AB = AC$. CT مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است اندازه زاویه

\widehat{BCT} را بیابید.



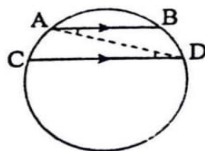
حل : برای بدست آوردن زاویه \widehat{BCT} کافی است اندازه کمال BC را به دست آوریم.

$$AB = AC \Rightarrow AB = AC \xrightarrow{\widehat{AC}=140^\circ} AB = AC = 14$$

$$\Rightarrow BC = 360 - (AB + AC) = 360^\circ - 280^\circ$$

$$\widehat{BCT} = \frac{BC}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \text{ (ظلی)}$$

مسئله: ثابت کنید کمان های محصور بین دو وتر موازی از یک دایره برابرند



راه حل: در شکل بالا $AB \parallel CD$ می خواهیم ثابت کنیم.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$AC = BD$$

وتر AD را رسم می کنیم چون $AD \parallel CD$ و AD مورب است پس:

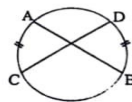
$$\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BD$$

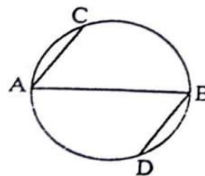
پس $AC = BD$

تذکره: عکس مسئله ی بالا لزوما درست نیست یعنی در شکل رو به رو دو کمان AC , BD با هم برابرند اما وترهای AB , CD موازی نیستند.



مسئله: در شکل زیر AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند.

ثابت کنید $AC = BD$ (تمرین ۵ صفحه ۱۷)



راه حل : چون AB قطر دایره است، پس (۱) $AC + BC = BD + AD = 180^\circ$

از طرف دیگر کمان های محصور بین دو وتر موازی مساوی اند، پس

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

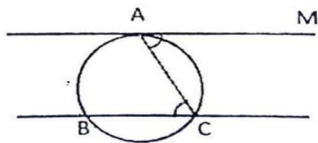
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$BC = AD \quad (۲)$$

با کم کردن تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $AC = BD$ می دانیم وترهای نظیر کمان های برابر در یک دایره با هم مساوی اند پس $AD = BD$

مسئله: ثابت کنید که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره با هم برابرند (تمرین ۱ صفحه ۱۷)



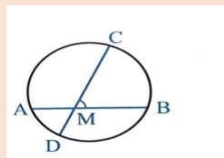
در شکل بالا بنا بر قضیه خطوط موازی $MAC = BCA$

$$\left. \begin{array}{l} MAC = \frac{1}{2} AC \\ ACB = \frac{1}{2} AB \end{array} \right\} \xrightarrow{MAC=ACB} \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AC = AB$$

زاویه بین دو وتر در دایره

(۱) اگر مطابق شکل دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند، آن گاه

$$A\hat{M}D = B\hat{M}C = \frac{AD + BC}{۲}$$



اثبات:

مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

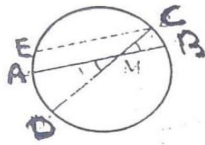
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

فرض : AB , CD دو وتر متقاطع از دایره :

$$\text{حکم : } \widehat{AMD} = \frac{AD + BC}{2}$$

از نقطه C خطی موازی با وتر AB رسم می کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.



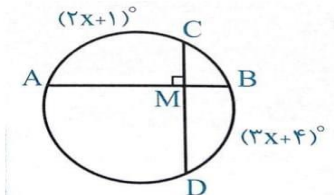
$$\widehat{ECD} = \frac{ED}{2} = \frac{EA + AD}{2} \text{ بنابراین } \widehat{ECD} = \widehat{AMD}$$

قبلا ثابت کردیم که کمان های محصور بین دو وتر موازی برابرند یعنی:

$$AB \parallel EC \Rightarrow AE = BC$$

$$\widehat{ECD} = \frac{BC + AD}{2} \Rightarrow \widehat{AMD} = \frac{BC + AD}{2}$$

مثال: مقدار x را در شکل مقابل به دست آورید.



پاسخ

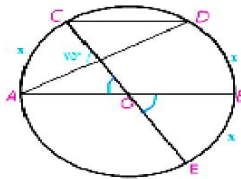
$$\begin{aligned} \widehat{CMA} &= \frac{AC + BD}{2} \xrightarrow{\widehat{CMA} = 90^\circ} 90^\circ = \frac{AC + BD}{2} \Rightarrow \frac{(2x+1)^\circ + (2x+4)^\circ}{2} \\ &= 90^\circ \Rightarrow 5x + 5 = 180^\circ \Rightarrow x = 35^\circ \end{aligned}$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مسئله : در شکل O مرکز نیم دایره است و $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را بدست آورید.

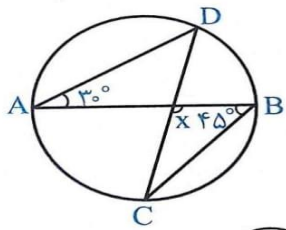


$$75^\circ = \frac{(x+x)+x}{2} \Rightarrow 150^\circ = 3x \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$CD = 180^\circ - 2x \Rightarrow CD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

تست : در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

۹۵(۱) ۱۰۰(۲) ۱۰۵(۳) ۱۱۰(۴)



پاسخ:

$$\hat{A} = \frac{BD}{2} \Rightarrow BD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{زاویه محاطی } \hat{B} = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

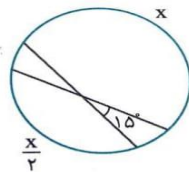
حبیب هاشمی

$$AD + BC + AC + BD = ۲۶۰^\circ \Rightarrow AD + BC + ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۲۶۰^\circ \Rightarrow AD + BC = ۲۱۰$$

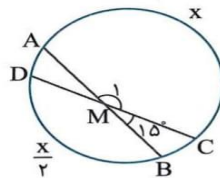
$$x = \frac{AD + BC}{۲} = \frac{۲۱۰^\circ}{۲} = ۱۰۵^\circ \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$

تست : در شکل مقابل مقدار X کدام است؟

- ۲۴۰ (۴) ۲۳۰ (۳) ۲۲۰ (۲) ۲۰۰ (۱)



پاسخ: از نماد گذاری شکل رو به رو استفاده می کنیم.



$$\hat{M}_1 = ۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ = ۱۶۵^\circ \quad \text{توجه کنید که}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{AC + BD}{۲} \quad \text{از طرف دیگر}$$

$$۱۶۵^\circ = \frac{x + \frac{x}{۲}}{۲} \quad \text{در نتیجه:}$$

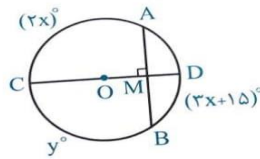
بنابر این $x = ۲۲۰^\circ$ بنا بر این گزینه (۲) درست است.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

مثال: در شکل مقابل قطر CD در نقطه M بر وتر AB عمود است. اگر $AC = (2x)^\circ$ و $BC = y^\circ$ آن گاه X و Y را محاسبه کنید.



حل

$$\hat{M} = \frac{AC + BD}{2} \Rightarrow 90^\circ = \frac{(2x)^\circ + (3x + 15)^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow 5x = 165^\circ \Rightarrow x = 33^\circ$$

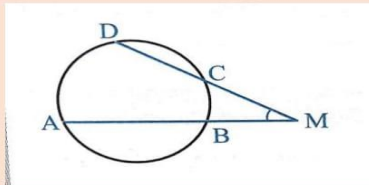
$$y = BC'$$

اما $BC = AC$ (به دلیل آن که قطر CD وتر AB و کمان های نظیر آن را نصف می کند) بنابراین:

$$y = 2x = 66^\circ$$

(۲) اگر مطابق شکل امتداد دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کنند آنگاه

$$\hat{M} = \frac{AD + BC}{2}$$



اثبات :

M نقطه تقاطع امتداد دو وتر AB , DC بیرون از دایره : فرض

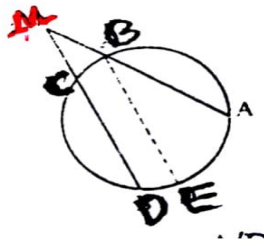
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\text{حکم: } \hat{M} = \frac{AD + BC}{2}$$

از نقطه B خطی موازی با وتر CD رسم می کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.



$$A'D \square BB' \xrightarrow{\text{و تر موازی}} \hat{AMB} = \hat{AA'D}$$

$$BE \square DC \xrightarrow{\text{و تر موازی}} \hat{M} = \hat{ABE}$$

زاویه ABE محاطی است بنابراین

$$\hat{AA'D} = \frac{AD}{2} = \frac{AB - BD}{2}$$

$$\hat{ABE} = \frac{AE}{2} = \frac{AD - DE}{2}$$

قبلا ثابت کردیم کمان های محصور بین دو وتر موازی برابرند پس

$$A'D \parallel B'B \Rightarrow A'B = BD$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

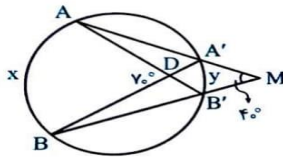
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$BE \parallel DC \Rightarrow BC = DE$$

$$A\hat{B}E = \frac{AD - BC}{2} \Rightarrow M = \frac{AD - BC}{2}$$

مثال: مقادیر x و y را در شکل روبه رو تعیین کنید.



پاسخ:

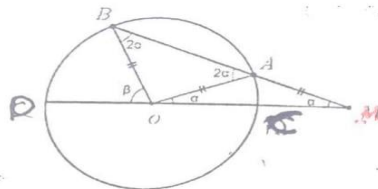
$$A\hat{D}B = \frac{x + y}{2} \rightarrow 70^\circ = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 140^\circ, \hat{M} = \frac{x - y}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{x - y}{2} \Rightarrow$$

$$40^\circ = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x - y = 80^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = 140^\circ \\ x - y = 80^\circ \Rightarrow x = 110^\circ \Rightarrow 30^\circ \end{cases}$$

مسئله: دایره $C(O, R)$ مفروض است از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسمی کرده ایم که دایره

را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ نشان دهید $\beta = 3\alpha$



طبق فرض $OA = MA = R$ بنابراین مثلث MAO متساوی الساقین است. پس $A\hat{O}M = \hat{M} = \alpha$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

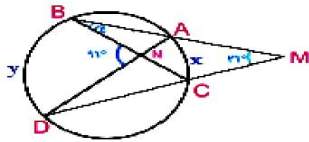
$$(مرکزی) \hat{AOM} = AC = \alpha \quad (۱)$$

$$(مرکزی) \hat{BOD} = BD = \beta \quad (۲)$$

از طرفی

$$\hat{M} = \frac{BD - AC}{۲} \xrightarrow{M=\alpha} \alpha = \frac{\beta - \alpha}{۲} \rightarrow \beta = ۳\alpha$$

مثال : در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.



$$\hat{M} = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۳۱^\circ = y - x$$

$$\hat{N} = \frac{y + x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۹۱^\circ = y + x$$

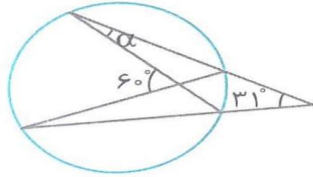
$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۶۲^\circ \\ y + x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y - ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

مسئله: در شکل مقابل اندازه ی زاویه ی α را به دست آورید.

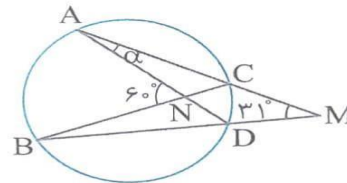
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی



راه حل: از نماد گذاری شکل مقابل استفاده می کنیم.



توجه کنید که

$$\widehat{AMB} = 31^\circ = \frac{AB - CD}{2}$$

و

$$\widehat{ANB} = 60^\circ = \frac{AB + CD}{2}$$

بنابر این

$$\begin{cases} AB - CD = 62^\circ \\ AB + CD = 120^\circ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا به دست می آید.

$$CD = 29^\circ$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

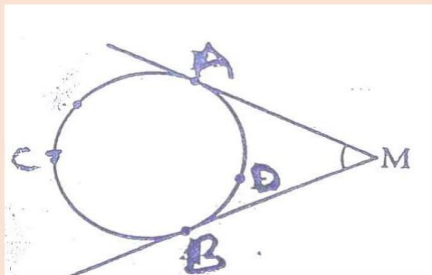
زاویه ی CAD محاطی است. پس

$$\widehat{CAD} = \alpha = \frac{CD}{2} = \frac{1}{2} \times 29^\circ$$

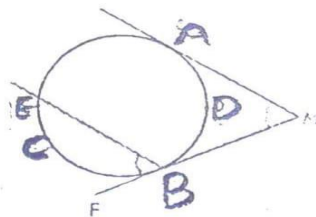
زاویه بین دو مماس

اگر مطابق شکل از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شود، آن گاه زاویه بین دو مماس برابر است

$$\widehat{M} = \frac{ACB - ADB}{2}$$



اثبات: راه حل اول: از B خطی موازی AM رسم می کنیم تا دایره را از نقطه ی E قطع کند.



بنابر قضیه خطوط موازی $AMB = EBF$

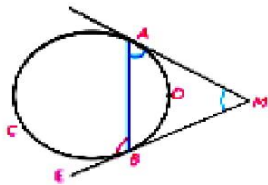
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$AMB = EBF = \frac{FB}{2} = \frac{ACB - AE}{2} \xrightarrow{AE=ADB} AMB = EBF = \frac{ACB - ADB}{2}$$

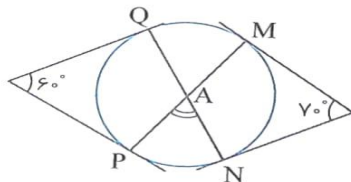
راه دوم : از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث AMB زاویه $E\hat{B}A$ خارجی است:



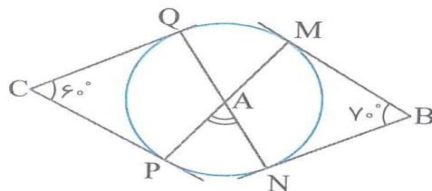
$$E\hat{B}A = M\hat{A}B + \hat{M} = E\hat{B}A - M\hat{A}B \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2}ACB - \frac{1}{2}ADB \Rightarrow \hat{M} = \frac{(ACB - ADB)}{2}$$

ظلی ظلی

مثال: در شکل مقابل اندازه ی زاویه A چند درجه است؟



راه حل : از نماد گذاری شکل مقابل استفاده می کنیم .



با توجه به مسئله ی قبل می توان نوشت:

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$\widehat{MBN} = 70^\circ = \frac{MQN - MN}{2}$$

$$= \frac{MQ + OP + PN - MN}{2}$$

همچنین:

$$\widehat{QCP} = 60^\circ = \frac{QMP - PQ}{2} = \frac{QM + MN + NP - PQ}{2}$$

با جمع کردن این دو تساوی به دست می آید

$$130^\circ = \frac{2MQ + 2NP}{2}$$

یعنی

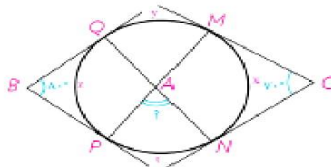
$$MQ + NP = 130^\circ$$

اکنون می توان نوشت

$$\widehat{PAN} = \frac{MQ + NP}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

مثال: در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه \widehat{A} چند درجه است. (تمرین

۳ صفحه ۱۷)



مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$۷۰^\circ = \frac{(y + z + t) - x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰^\circ = (y + z + t) - z$$

$$۸۰^\circ = \frac{(y + x + t)}{۲} \Rightarrow ۱۸۰^\circ = (y + x + t) - z$$

$$\begin{cases} ۱۴۰^\circ = y + z + t - x \\ \Rightarrow ۳۰۰^\circ = ۲(y - t) \Rightarrow y + t = ۱۵۰^\circ \\ ۱۶۰^\circ = y + x + t - z \end{cases}$$

$$\widehat{A} = \frac{y + t}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

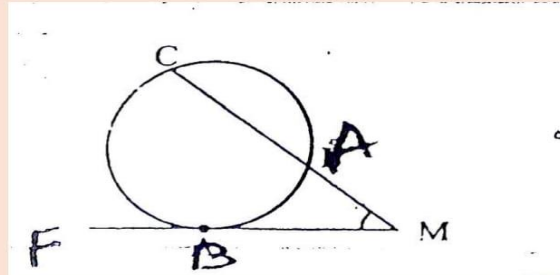
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

زاویه بین مماس و امتداد یک وتر

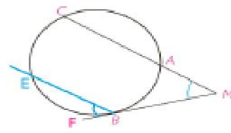
اگر مطابق شکل، امتداد وتر BC و خط مماس بر دایره در نقطه A یکدیگر را در نقطه M قطع کنند،

$$\widehat{M} = \frac{BC - AB}{2} \quad \text{آن گاه}$$



(تمرین ۱ صفحه ۱۷)

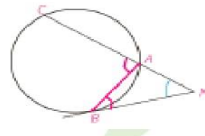
اثبات راه اول: از نقطه B موازی MC خطی رسم می کنیم تا در نقطه E دایره ای رسم کنیم.



بنا بر قضیه خطوط موازی

$$CMB = EBF = \frac{EB}{2} = \frac{BC - CE}{2} \xrightarrow{CE=AB} CMB = EBF = \frac{BC - AB}{2}$$

راه دوم: از نقطه A به B وصل می کنیم. در مثلث AMB زاویه BAC خارجی است پس:



مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

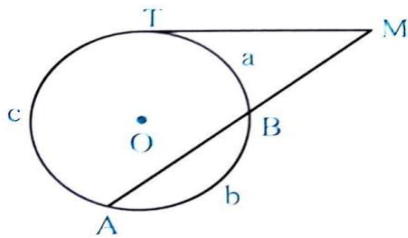
@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

$$BAC = MBA + \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = BAC - MBC \Rightarrow \widehat{M} = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB \Rightarrow \widehat{M} = \frac{(BC - AB)}{2}$$

مثال: خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB در نقطه M متقاطع اند.

فرض $AT = c$, $BA = b$, $TB = a$ و اندازه زاویه M را تعیین کنید.



حل) طبق تناسب a , b و c داریم:

$$\begin{aligned} b &= 4a \\ c &= 5a \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 360^\circ \xrightarrow{(1)} a + 4a + 5a = 360^\circ \\ \Rightarrow 10a &= 360^\circ \Rightarrow a = 36^\circ \Rightarrow c = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{M} = \frac{TA - TB}{2} = \frac{c - a}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$$

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

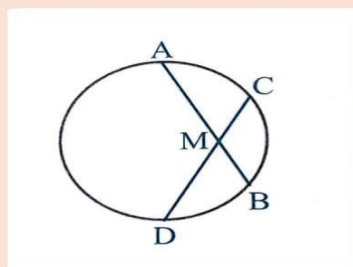
درس دوم: روابط طولی در دایره

الف) وترهای متقاطع

در وتر AB و CD از یک دایره یکدیگر را در نقطه M قطع کنند می خواهیم به بررسی روابط بین اندازه ی پاره های حاصل می پردازیم.

قضیه ۱: اگر دو وتر AB , CD در داخل دایره یکدیگر را قطع کنند آنگاه

$$AM \cdot MB = MC \cdot MD$$



اثبات:

A را به D و B را به

جهت تهیه ادامه ی این جزوه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی

تلگرام @habib_hashemi پیام دهید.

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی
کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش و پرورش
منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس بگیرید و یا به آیدی تلگرام
@habib_hashemi پیام دهید.

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

تدریس خصوصی و مبحثی ریاضیات

متوسطه

و

تضمینی کنکور

تهران و کرج

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی

موفق بودن در ریاضی ادرصد استعداد و ۹۹ درصد پشتکار

تدریس خصوصی ریاضیات

متوسطه اول و متوسطه دوم

کنکور - تقویتی

گروهی / انفرادی

به صورت تخصصی و کاملا مفهومی با جزوه اختصاصی

مشاهده جزوات در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

دبیر رسمی آموزش و پرورش با ۱۸ سال سابقه تدریس

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مولف شش کتاب در زمینه کنکور

نویسنده برتر استان

معلم نمونه شهرستان و استان

نفر اول استان در جشنواره الگوهای برتر تدریس

نفر اول کشور در جشنواره الگوهای برتر تدریس

شماره تماس: ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

استاد : حبیب هاشمی

مبحث : درسنامه و تست فصل اول هندسه یازدهم ریاضی

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

@eshgheriazikonkour

حبیب هاشمی